

Gazdaságmatematika II. - 8. gyakorlat

dr. Földvári Attila

A feladatok dr. Házy Attila: Gazdaságmatematika 2 Példatár a második zárthelyi dolgozathoz című feladatsorából származnak.

1. Egy üzem T_1 és T_2 termékeket gyárt. A T_1 termék 4 pénzegység, a T_2 termék 5 pénzegység nyereséget termel. Az üzem három különböző részlegből áll. A T_1 termék elkészítéséhez az egyes részlegekben rendre 2, 1, 1 óra szükséges, a T_2 termék elkészítéséhez 1, 3, 2 óra. Az első két részleg kapacitása napi 64-64 óra, a harmadik részleg kapacitása napi 44 óra. Milyen napi termelés maximalizálja az üzem nyereségét?

a) A feladat matematikai modellje:

T_1 termék napi termelése: x_1 T_2 termék napi termelése: x_2

$$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 64$$

$$1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 64$$

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 44$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

b) Standard alak

$$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + u_1 = 64$$

$$1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + u_2 = 64$$

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + u_3 = 44$$

$$x_1, x_2, u_1, u_2, u_3 \geq 0$$

$$4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

c) Pivotálás

	x_1	x_2	b		u_1	x_2	b		u_1	u_3	b		
u_1	2	1	64	$\Rightarrow$	x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	32	$\Rightarrow$	x_1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	28
u_2	1	3	64		u_2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	32		u_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	12
u_3	1	2	44		u_3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	12		x_2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	8
$-z$	4	5	0		$-z$	-2	3	-128		$-z$	-1	-2	-152

d) Optimális megoldás:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -z = -152 \\ z = 152 \end{matrix}$$

A T_1 termék napi 28 egység és
a T_2 termék napi 8 egység
termelése maximalizálja az üzem nyereségét.
A maximális nyereség 152 pénzegység

2. Egy vállalat T_1 és T_2 termékeket gyárt. A termékeket megmunkálása négy gépen történik. A T_1 termék megmunkálási ideje a gépeken rendre 1, 0, 2, 3 óra, a T_2 termék megmunkálási ideje 2, 1, 0, 4 óra. A gépek kapacitása rendre 320, 140, 120 és 800 óra. A T_1 termék 8 pénzegység, a T_2 termék 2 pénzegység nyereséget termel. Milyen napi termelés maximalizálja a vállalt nyereségét?

a) A feladat matematikai modellje:

T_1 termék napi termelése: x_1 T_2 termék napi termelése: x_2

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 320$$

$$1 \cdot x_2 \leq 140$$

$$2 \cdot x_1 \leq 120$$

$$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 800$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$8 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

b) Standard alak

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + u_1 = 320$$

$$1 \cdot x_2 + u_2 = 140$$

$$2 \cdot x_1 + u_3 = 120$$

$$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + u_4 = 800$$

$$x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0$$

$$8 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

c) Pivotálás

	x_1	x_2	b		x_1	u_2	b
u_1	1	2	320		u_1	1 -2	40
u_2	0	1	140		u_2	0 1	140
u_3	2	0	120	$\Rightarrow$	u_3	2 0	120
u_4	3	4	800		u_4	3 -4	240
$-z$	8	2	0		$-z$	8 -2	-280

	u_1	u_2	b		u_1	u_3	b
x_1	1	-2	40		x_1	0 $\frac{1}{2}$	60
x_2	0	1	140		x_2	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{4}$	130
u_3	-2	4	40	$\Rightarrow$	u_2	$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$	10
u_4	-3	2	120		u_4	-2 $-\frac{1}{2}$	100
$-z$	-8	14	-600		$-z$	-1 $-\frac{7}{2}$	-740

d) Optimális megoldás:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 130 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} -z = -740 \\ z = 740 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{A } T_1 \text{ termék napi 60 egység} \\ \text{és a } T_2 \text{ termék napi 130 egység} \\ \text{termelése maximalizálja a vállalat nyereségét.} \\ \text{A maximális nyereség 740 pénzegység} \end{array}$$

3. Három nemnegatív számot szeretnénk meghatározni úgy, hogy az első hétszeresének, a második tizennégyszeresének és a harmadik hatszorosának összege maximális legyen. Az első szám kétszeresének, a második négyszeresének és a harmadik szám összege ne legyen nagyobb 300-nál. Továbbá az első szám háromszorosának, a második szám kétszeresének és a harmadik szám összege legfeljebb 200 legyen. Mely számokat válasszuk?

a) A feladat matematikai modellje:
jelölje x , y és z a keresett számokat

$$\begin{array}{l} 2 \cdot x + 4 \cdot y + 1 \cdot z \leq 300 \\ 3 \cdot x + 2 \cdot y + 1 \cdot z \leq 200 \\ x, y, z \geq 0 \\ 7 \cdot x + 14 \cdot y + 6 \cdot z \rightarrow \max \end{array}$$

b) Standard alak

$$\begin{array}{l} 2 \cdot x + 4 \cdot y + 1 \cdot z + u_1 = 300 \\ 3 \cdot x + 2 \cdot y + 1 \cdot z + u_2 = 200 \\ x, y, z, u_1, u_2 \geq 0 \\ 7 \cdot x + 14 \cdot y + 6 \cdot z \rightarrow \max \end{array}$$

c) Pivotálás

$$\begin{array}{c|ccc|c} & x & y & z & b \\ \hline u_1 & 2 & 4 & 1 & 300 \\ u_2 & 3 & 2 & 1 & 200 \\ \hline -z & 7 & 14 & 6 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc|c} & x & y & u_2 & b \\ \hline u_1 & -1 & 2 & -1 & 100 \\ z & 3 & 2 & 1 & 200 \\ \hline -z & -11 & 2 & -6 & -1200 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & x & u_1 & u_2 & b \\ \hline y & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 50 \\ z & 4 & -1 & 2 & 100 \\ \hline -z & -10 & -1 & -5 & -1300 \end{array}$$

d) Optimális megoldás:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} -z = -1300 \\ z = 1300 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{A } (0, 50, 100) \text{ számhárm} \\ \text{egy megfelelő választás.} \end{array}$$

4. Egy vállalat T_1 , T_2 és T_3 termékeket gyárt. A termékeket megmunkálása két gépen történik. A T_1 termék megmunkálási ideje a gépeken rendre 2 és 8 óra, a T_2 termék megmunkálási ideje 1 és 2 óra, a T_3 termék megmunkálási ideje 5 és 3 óra. A gépek kapacitása rendre 60 és 160 óra. A T_1 termék 18 pénzegység, a T_2 termék 8 pénzegység, a T_3 termék 4 pénzegység nyereséget termel. Milyen napi termelés maximalizálja a vállalt nyereségét?

a) A feladat matematikai modellje:

T_1 / T_2 / T_3 termék napi termelése: x_1 / x_2 / x_3

$$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 \leq 60$$

$$8 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 160$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$18 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \rightarrow \max$$

b) Standard alak

$$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + u_1 = 60$$

$$8 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + u_2 = 160$$

$$x_1, x_2, x_3, u_1, u_2 \geq 0$$

$$18 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \rightarrow \max$$

c) Pivotálás

$$\begin{array}{c|ccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline u_1 & 2 & 1 & 5 & 60 \\ u_2 & 8 & 2 & 3 & 160 \\ \hline -z & 18 & 8 & 4 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc|c} & x_1 & u_1 & x_3 & b \\ \hline x_2 & 2 & 1 & 5 & 60 \\ u_2 & 4 & -2 & -7 & 40 \\ \hline -z & 2 & -8 & -36 & -480 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & u_2 & u_1 & x_3 & b \\ \hline x_2 & -\frac{1}{2} & 2 & \frac{17}{2} & 40 \\ x_1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 10 \\ \hline -z & -\frac{1}{2} & -7 & -\frac{65}{2} & -500 \end{array}$$

d) Optimális megoldás:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} -z = -500 \\ z = 500 \end{array}$$

A T_1 termék napi 10 egység,
a T_2 termék napi 40 egység
a T_3 termék napi 0 egység
termelése maximalizálja a vállalat nyereségét.
A maximális nyereség 500 pénzegység